نظریه‌ها

ون‌هیلی

دربارهٔ سطوح تفکر و استدلال هندسی

اشرف صفابخش چکوسری، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی مقطع متوسطهٔ اول استان گیلان
نرگس یافتیان، استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

چکیده

نظریهٔ ون‌هیلی یکی از نظریه‌های مطرح در زمینهٔ آموزش هندسه است. این نظریه توسط یک زوج هلندی به نام‌های پیره ماری ون‌هیلی و دینا ون‌هیلی گلداف برای نخستین بار در سال ۱۹۵۷ میلادی عنوان گردید و تا به امروز تغییرات و اصلاحاتی نیز در آن انجام گرفته است. نظریهٔ ون‌هیلی، سطح استدلال هندسی را در افراد دسته‌بندی می‌نماید، برای هر سطح مشخصه‌هایی ارائه می‌دهد و بدین وسیله تلاش می‌کند تا توضیحی برای ناتوانایی‌های برخی دانش‌آموزان در فهم روابط و استدلال‌های هندسی ارائه دهد. مطابق این نظریه، سطح تفکر هندسی افراد بیش از آنکه به رشد بیولوژیکی وابسته باشد، معلول شیوهٔ آموزشی است. نظریهٔ ون‌هیلی به این بسنده نکرده، راهکارهایی را زیر عنوان «فازهای یادگیری» به منظور کیفیت بخشی به آموزش هندسه و کمک به منظور بالا بردن سطح تفکر هندسی افراد، ارائه کرده است. البته همهٔ وجوه این نظریه در این مقاله بازگو نشده‌اند و هدف این مقاله، تنها شرح و توصیف یکی از جنبه‌های این نظریه، یعنی دسته‌بندی سطوح تفکر هندسی افراد است.

کلید واژه‌ها: آموزش هندسه، نظریهٔ ون‌هیلی، سطوح تفکر هندسی

مقدمه

آیا تا به حال دانش‌آموزانی در کلاس داشته‌اید که مربع را می‌شناسند ولی نمی‌توانند مربع را تعریف کنند؟ توجه کرده‌اید که بعضی از دانش‌آموزان درک نمی‌کنند که مربع نوعی مستطیل است؟ چند بار هنگام اثبات مطلبی نظیر اینکه «دو قطر مستطیل، هم‌اندازه‌اند» با این پرسش دانش‌آموزان مواجه شده‌اید که «چرا باید چیزی را که می‌دانیم، ثابت کنیم»؟ این پرسش‌ها، کم و بیش همان پرسش‌هایی است که مری کراولی[1] (۱۹۸۷) در آغاز نوشتار خود با عنوان *مدل ون‌هیلی دربارهٔ ارتقای تفکر هندسی*[2] مطرح کرده است؛ و کمتر کسی است که با آموزش هندسه سر و کار داشته باشد و چنین موقعیت‌هایی را در کلاس خود تجربه نکرده باشد. بسیاری از ما به‌عنوان معلمان ریاضی، برای مقابله با چنین موقعیت‌هایی، به مرور درس پرداخته‌ایم یا پیشنهاد حل تمرین‌های بیشتر را مطرح کرده‌ایم ولی

اگـــر بخواهیم به اندازهٔ کافـــی صراحت به خرج دهیم، باید اذعان کنیم که این روش‌ها به ندرت توانســـته‌اند در بهبود چنان کاستی‌هایی سودمند واقع گردند. شاید اندکی تســـکین‌بخش باشـــد اگر بدانیم که ما در این تجربهٔ ناخوشایند، تنها نبوده‌ایم و پژوهش‌های علمی و گزارش‌های مستند و تجربی گواه آن است که آموزش هندســـه تقریباً در همه جای دنیا با چالش‌هایی نظیر آنچه بیان شـــد، مواجه بوده است[3]. یافته‌های تیمز[4] در ســـال ۲۰۱۱ نیز، نشانگر آن بود که در میان حوزه‌های موضوعی ریاضیات، هندسه با کم‌ترین میزان موفقیت در ســـطح جهانی روبه‌رو بوده است (نتایج بین‌المللی تیمز ۲۰۱۱ در ریاضیات[5]، ۲۰۱۲). گواه دیگر این ادعا، داســـتان پیدایش نظریه‌ای است که این مقاله در صدد معرفی آن است.

در دههٔ ۶۰ میلادی یک زوج هلندی که به آموزش ریاضی و هندســـه در مدارس هلند اشتغال داشتند، در اثر رویارویی مکرر با بدفهمی‌های دانش‌آموزان در درس هندسه، به فکر ریشه‌یابی و چاره‌جویی برآمدند. ناتوانی و مشکلات دانش‌آموزان در درک مفاهیمی هندسی که بارها و بارها توضیح داده شده بود، پیره ماری ون‌هیلی[6] و دینا ون‌هیلی گلداف[7] را به جست‌وجوی سرچشمهٔ این مشـــکلات برانگیخت و آنچه از دل این جست‌وجو زاده شـــد، نظریه‌ای بود که امروزه به نـــام این دو، به نظریهٔ ون‌هیلی مشهور است. پیره ون‌هیلی (۱۹۸۶)، به زیبایی چگونگی تبلور ایدهٔ این نظریه را بیان می‌کند:

> خیلی زود پس از آن که شغلم را به‌عنوان معلم ریاضی آغاز کردم، دریافتم که این حرفه، حرفهٔ سختی است. مباحثی بود که من می‌توانستم بارها و بارها توضیح دهم در حالی که دانش‌آموزان همچنان این مباحـــث را درک نمی‌کردند. در طول ســـال‌های پس از آن، توضیحاتم را بارها و بارها عوض کردم ولی آن مشکلات، همچنان باقی ماندند. همواره این‌گونه بود که گویی من به زبان دیگری صحبت می‌کردم و همین ایده بود که سبب کشف راه‌حل شد: سطوح متفاوت تفکر (ساختار و بینش[8]، صفحهٔ ۳۹؛ نقل شده در اَدِل[9] ۱۹۹۸).

وضعیتی در زندگی روزمره را در نظر بگیرید که در آن دو نفر که به دو کشـــور متفاوت تعلق دارند و به دو زبان متفاوت صحبت می‌کنند و با دو فرهنگ متفاوت بزرگ شده‌اند، بخواهند با هم ارتباط کلامی برقرار کنند. ناگفته پیداست که چنین ارتباطی، لبریز از برداشت‌های اشتباه و کج‌فهمی‌ها خواهد بود و چه بسا که حتی از همان آغاز به بن‌بست برسد. آنچه زوج ون‌هیلی، هوشمندانه به آن اندیشیدند آن بود که این بیگانگی ممکن است در نوع نگرش و استدلال دو نفر هم وجود داشته باشد و در چنین حالتی دور از انتظار نیست اگر هر دو به یک چیز نگاه کنند و دو چیز کاملاً متفاوت ببینند.

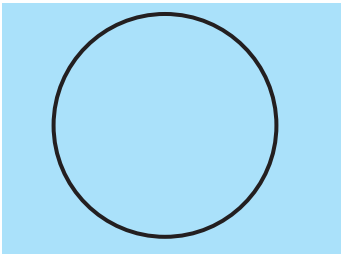
دســـتاورد کوشش این دو پژوهشـــگر را می‌توان در دو بخش کلی خلاصه کرد: (۱) ریشه‌یابی و شناسایی مشکل و (۲) ارائهٔ راهکاری برای درمان یا دست‌کم بهبود آن. آن‌ها برای تحقق نخستین بخش، کوشیدند که برای نوع نگرش استدلالی افراد، یک طبقه‌بندی ارائه دهند و برای آنکه بتوانند در عمل، افراد را در این طبقات دسته‌بندی کنند، برای هر طبقه، ویژگی یا مشـــخصه‌هایی در نظر بگیرند. همچنین به‌منظور محقق ســـاختن بخش دوم، به ارائهٔ الگوریتمی در جهت ارتقا از یک سطح به سطح بالاتر پرداختند. در اینجا بی‌آنکه قصد داشته باشیم به میزان کارآمدی یا ناکارآمدی این نظریه بپردازیم، می‌کوشیم بخش‌هایی از آن را بیان و تا حد امکان تشریح کنیم.

سطوح تفکر هندسی در نظریهٔ ون‌هیلی

پیـــش از معرفی ســـطوح ون‌هیلی، توضیـــح نکته‌ای ضروری به نظر می‌رســـد. در معرفی این بخش از نظریه، از منابعی که در پایان مقاله فهرست شده‌اند به‌صورت تلفیقی استفاده گردیده است و به‌منظور ملموس‌تر ساختن نظریه، گاهی مثال‌ها و توضیحاتی که نویســـندگان مقالهٔ حاضر با تکیه بر تجربهٔ شـــخصی فراهم آورده‌اند، افزوده شده است. روال معمول و ســـاختار مقاله‌نویسی چنین حکم می‌کند که منبع هر بخش بلافاصله پس از بازنویســـی متن مورد اشاره، آورده شود؛ ولی از آنجا که ذکر منابع متعدد لابه‌لای سطور نوشتار، گاهی در روند خواندن متن توسط خوانندگان عمومی، وقفه و گسستگی ایجاد می‌کند و با توجه به اینکه هدف نویسندگان مقالهٔ حاضر، توصیف سطوح ون‌هیلی به بیانی ساده و تا حد ممکن روان و بی‌تکلف بوده است، دست به ساختارشـــکنی زده و تنها به ذکر منابع در پایان مقاله بسنده کرده‌اند.

سطح ۱: (تجسم یا شناســـایی[10]). بیاییم توضیح ویژگی‌های این ســـطح را با بررســـی یک مثال آغاز کنیم. شکل ۱ را در نظر بگیرید. حال کودکی را در نظر بگیرید که از او نام این شکل را پرسیده‌ایم و پاسخ او «دایره» بوده است. از این کودک سؤال کردیم که چرا به شکل ۱، نام دایره داده است و پاسخی که دریافت کردیم چنین بود: «چون شبیه توپ یا خورشـــید اســـت». اصرار ما به ارائهٔ توضیح یا دلیل

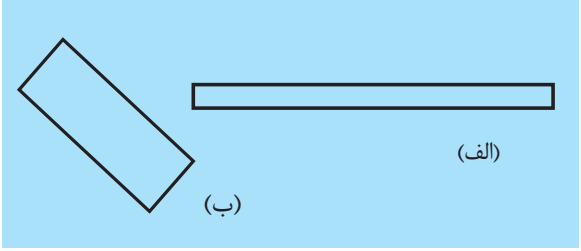
بیشتر به اینجا انجامید که این کودک جملهٔ پیشین خود را به شکل‌های مختلف تکرار کند و یا استدلالی به این گونه ارائه دهد: «این شـــکل یک دایره است چون گرد است» یا حتی استدلال خود را برای تشخیص دایره بودنِ شکل این گونه بیان کند که «چون یک دایره است»!



شکل ۱

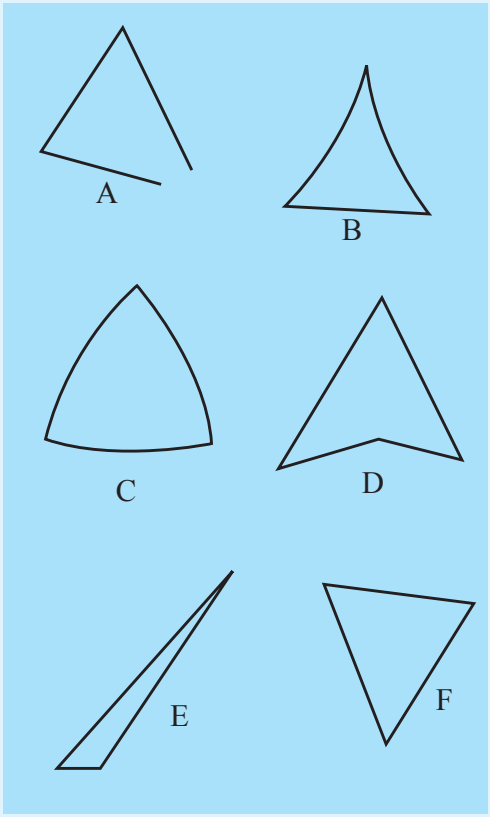
این دلایل چیزهایی نیســـتند که بیشـــتر ما به‌عنوان معلمان و آموزشگران ریاضی، با رضایت به آن‌ها نام استدلال بدهیم، ولی اگـــر «دلیل آوردن» را به‌عنـــوان تعریف واژهٔ استدلال بپذیریم، لزومی در درست بودن، ریاضی‌وار بودن یا منطقی بودن یک استدلال وجود ندارد. شیوه‌ای که این کودک برای استدلال به کار می‌برد، بر ظاهر شکل و الگوهای فیزیکیِ مشابه آن (در اینجا خورشید یا توپ) متکی است. کـــودک چیزی دربارهٔ «ویژگی‌های» دایره نمی‌داند و درک نمی‌کند. اگر به او گفته شـــود که «کتاب» یا «پنجره» به شکل مستطیل هستند، احتمالاً همین اشیاء را هم بعدها به‌عنوان معیاری برای سنجش مســـتطیل بودن یا نبودنِ یک شـــکل هندســـی دیگر به کار خواهد برد. حتی دور از انتظار نیســـت کودکی که چنین استدلال می‌کند، پس از دیدن شـــکل ۲، هیچ‌کدام را مســـتطیل نداند؛ (الف) چون خیلی درازتر از آن است که مستطیل باشد و (ب) چون کج است! در واقع هیچ‌کدام از این دو تصویر، شبیه یک «در» در وضعیت معمول آن، نیستند.

شکل ۲



در نظریهٔ ون‌هیلی، چنین استدلال‌هایی که تنها مبتنی بر ظاهر و کلیت شـــکل و بدون توجه به اجزا و ویژگی‌های آن هستند، در سطح اول دسته‌بندی شده‌اند. به دلیلِ همین قضاوتِ مبتنی بر ظاهر فیزیکی شـــکل، به این ســـطح از استدلال، عنوان تجسم یا شناسایی داده‌اند.

شـــکل ۳ مربوط به مثالی اســـت که در ســـایت ویکی‌پدیا[11] و در توضیح سطوح ون‌هیلی آورده شده اســـت. جالب اســـت که در اینجا، کودکی که توانایی اســـتدلال او در حد سطح اول است، شکل‌های B، C، A، و D را مثلث می‌داند. شکل F از نظر او، یک مثلث وارونه است و شکل E، اصلاً مثلث نیست!

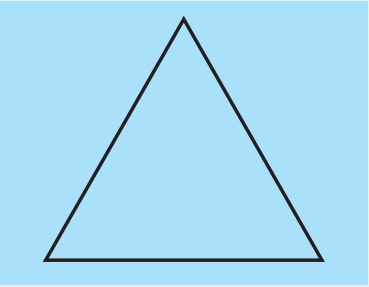


شکل ۳ (ویکی‌پدیا[12])

چرا او چنین پاســـخ می‌دهد؟ چـــون از نگاه او، یک مثلث، شـــکلی است شـــبیه چیزی که ما به آن «مثلث متســـاوی‌الاضلاع» می‌گوییـــم و البته مثلث متســـاوی‌الاضلاعی که روی یکی از قاعده‌های خود قرار گرفته است (شکل ۴). این الگو[13]، معیار او برای تشـــخیص مثلث‌هاست. هر چه شـــکلی به این الگو شبیه‌تر باشد، امکان آنکه از نظر این کودک به‌عنوان مثلث شناخته شود، بیشتر است. بنابراین شکل‌های A، B، C و D، بـــا آنکه اصلاً مثلث نیســـتند، چون کلیت آن‌ها به این الگوی ذهنی شـــبیه است، از دید او مثلث هســـتند. شـــکل E با آنکه یک مثلث است چون یکـــی از ضلع‌های آن در مقایســـه با دو ضلع دیگـــر، بیش از اندازه کوچک اســـت، شـــبیه الگوی

ذهنی کودک نیست و شـــکل F هم با کمی ارفاق، مثلث است.

شکل ۴



سطح ۲: (تجزیه و تحلیل[۱۴]). می‌خواهیم پا به پای کودکی که دیدگاه او در سطح پیشین مورد بررسی قرار گرفت، سطوح ون‌هیلی را پشت سر بگذاریم. همان کودک را در نظر بگیرید که توانسته است پس از کسب مهارت کافی در ســـطح اول، اندک اندک این سطح را پشت سر گذاشته و به درک بالاتری دست یابد. این بار اگر از او دلیل مستطیل بودنِ یک شکل را بپرسید، پاسخ متفاوتی خواهید شنید. او ممکن است بگوید «این شکل یک مستطیل است چون ضلع‌های روبه‌روی آن با هم، هم‌اندازه‌اند». به بیان دیگر، او در این مرحله، به «اجزای» شکل و «ویژگی‌های» آن اجزا توجه می‌کند. باید بگوییم او با اســـتناد به یک تعریف ریاضی، به این شـــناخت از مستطیل‌ها نرسیده، بلکه مقایسه، اندازه‌گیری، برش، تا زدن و به‌طور کلی «تجربه و مشاهده» راه‌هایی است که او را متقاعد ساخته‌اند که یک مستطیل چنین ویژگی‌ای دارد. یعنی پایهٔ استدلال او در این مرحله، بر آزمایش و استقرا بنا نهاده شده است. او هنوز درکی از «تعریف‌ها» و «اســـتدلال‌های استنتاجی» ندارد. این موضوع منجر به پدید آمدن وضعیت‌هایـــی نظیر آنچه در ادامه بیان می‌شود خواهد شد.

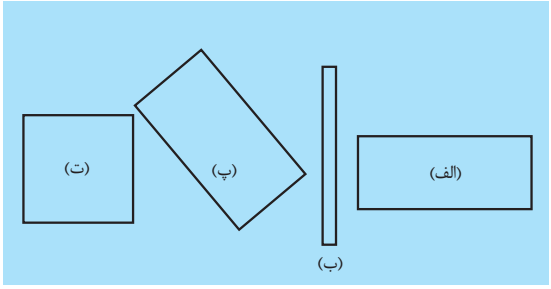
شما به‌عنوان معلم ریاضی، تعریفی از مستطیل ارائه می‌دهید:

مســـتطیل یک چهارضلعی اســـت که هر دو ضلع روبه‌روی آن با هم، هم‌اندازه‌اند و همچنین، چهار زاویهٔ قائمه دارد.

دانش‌آموزان سری تکان می‌دهند و تأیید می‌کنند. استنباط شما این اســـت که آن‌ها منظور شما را درک کرده‌اند. سپس چند مستطیل متفاوت رسم می‌کنید و ســـعی می‌کنید این ویژگی‌ها را در هـــر یک از این مستطیل‌ها نشان دهید (شکل ۵). همه چیز به خوبی پیش می‌رود تا زمانی که به شـــکل (۵-ت) می‌رسید. اینجاســـت که برخـــی از دانش‌آموزان‌تـــان از پذیرش مستطیل بودن این شکل، سر باز می‌زنند چون این شکل یک مربع اســـت. اگر از آن‌ها دربارهٔ دلیل مخالفت‌شـــان بپرسید، آنچه می‌گویند مشابه این جمله‌هاست:

«چون دو تا از ضلع‌های مســـتطیل درازتر از دو ضلع دیگرش است ولی همهٔ ضلع‌های مربع هم‌اندازه‌اند. از طرفی این شکل (مربع) خودش دارای یک نام است و چیزی را که مربع است، چگونه می‌توان مستطیل نامید؟»

شکل ۵



اگر دانش‌آموزان شـــما چنین استدلالی را ارائه دهند، توانایی اســـتدلال آن‌ها به احتمال نزدیک به یقین، از حد ســـطح دوم ون‌هیلی فراتر نرفته است. این ممکن است به آن دلیل باشـــد که در سال‌های پیشین، آموزش مناسبی دریافت نکرده‌اند یا مباحث کتاب و مطالبی که به آن‌ها ارائه می‌کنید، فراتر از سطح استدلال آن‌هاست. در هر دو حالت، شما با تکرار این مطلب که مربع نوعی مستطیل است، شاید تنها بتوانید آن‌ها را به ســـمت به خاطر سپردن این مطلب سوق دهید ولی نمی‌توانید انتظار داشته باشید که آن‌ها این موضوع را همان‌طور که شما درک کرده‌اید، درک کنند.

می‌دانیـــم که در چهارچوب هندســـهٔ اقلیدســـی، در چهارضلعـــی‌ای که اندازهٔ هر دو ضلع روبـــه‌روی آن با هم برابرند، قائمه بودن یکی از زاویه‌ها، قائمه بودن ســـه زاویهٔ دیگر را ایجاب خواهد کرد. همچنین همین که شرایط بیان شده در تعریف مستطیل، برقرار گردند، برابری اندازه‌های دو قطر نتیجه‌ای ناگزیر اســـت. ولی اگر از دانش‌آموزی که در حد سطح دوم استدلال می‌کند بخواهید یک مستطیل را معرفی کند، ممکن است بگوید:

«یک مســـتطیل، شـــکلی اســـت که اندازهٔ ضلع‌های روبـــه‌روی آن با هم برابرند؛ همـــهٔ زاویه‌های آن قائمه‌اند و قطرهای آن نیز با هم، هم‌اندازه‌اند.»

در این تعریف، ویژگی «چهارضلعی بودن» بیان نشده اســـت (حذف شـــرط ضروری)؛ و از طرفی هم‌اندازه بودنِ قطرهـــا، که بیان آن در تعریف، ضروری نیســـت، به‌عنوان بخشی از تعریف مســـتطیل آورده شده است (بیان شرط زائد). این به آن سبب است که در این سطح، هنوز شرط‌های

آنچه زوج ون‌هیلی، هوشمندانه به آن اندیشیدند آن بود که این بیگانگی ممکن است در نوع نگرش و استدلال دو نفر هم وجود داشته باشد و در چنین حالتی دور از انتظار نیست اگر هر دو به یک چیز نگاه کنند و دو چیز کاملاً متفاوت ببینند

لازم و کافی و رابطه‌های میان ویژگی‌های مختلف یک شکل، درک نمی‌شوند.

پس در یک جمع‌بندی می‌تـــوان گفت، دانش‌آموزانی که به اجزای شـــکل‌ها توجه می‌کنند و استدلالی مبتنی بر اجزا و ویژگی‌های آن‌ها ارائه می‌دهند، ولی هنوز تعریف‌ها، تداخل شکل‌ها و روابط بین ویژگی‌های اجزا را نمی‌بینند، در دسته‌بندی ون‌هیلی در سطح دوم قرار می‌گیرند.

سطح ۳: (استنتاج غیررسمی). کودک پیشین که اکنون دیگر شـــاید بهتر باشد او را کودک ننامیم[۱۵]، توانسته است با گذر از سطح پیشین، به درک عمیق‌تری از استدلال دســـت یابد. او در سطح قبلی، مستطیل بودنِ یک مربع را می‌پذیرد، چون مســـتطیل یک چهارضلعی است که چهار زاویـــهٔ ۹۰ درجـــه دارد و مربع نیز این ویژگی را داراســـت. همچنین مربع یک لوزی هم هست؛ در واقع از نظر او، مربع یک نوع لوزی با برخی ویژگی‌های اضافی است. او اگرچه در این سطح تعریف‌ها را درک می‌کند، ولی هنوز اهمیت نقش آن‌ها را در پی‌ریزی ریاضیات درنیافته اســـت. او می‌تواند با دانستن اینکه مجموع زاویه‌های هر مثلث ۱۸۰ درجه است، استدلالی برای مجموع زاویه‌های یک چهارضلعی ارائه دهد. استدلال او شاید به این گونه باشد که چون یک چهارضلعی را می‌توان به دو مثلث تقسیم کرد، پس مجموع زاویه‌های داخلی آن نیز، دو برابر مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث اســـت. با این حال اگـــر از او بخواهید که چنین اثباتی را به زبـــان ریاضی و یا با نظم منطقی ارائه دهد، احتمالاً هنوز از عهدهٔ این کار برنمی‌آید. در نظریهٔ ون‌هیلی از چنین اثباتی که بر ویژگی‌های اجزا و منطق ریاضی استوار است ولی هنوز از دقت کافی در بیان برخوردار نیســـت، با عنوان «استنتاج غیررسمی» یاد شده اســـت که در برابر «استنتاج رسمی» قرار دارد. استنتاج رسمی، همان شیوهٔ استنتاجی اصولی و منطقی ریاضی است که در آن گام‌های استدلال استنتاجی با بهره‌گیری از اصول، تعاریف، حقایق پذیرفته شده و قضیه‌های اثبات شدهٔ پیشین، به دقت و به‌طور سلسله مراتبی تنظیم گردیده‌اند.

فردی که سطح استدلال کردن او از سطح سوم ون‌هیلی فراتر نرفته است، ممکن است حتی بتواند مراحل یک اثباتِ انجام شده را بفهمد، ولی هنوز نظم منطقی بین گام‌های این اثبات را درک نمی‌کند. این امر زمانی آشکارتر می‌گردد که از او بخواهید برای مسئله‌ای که پیش از این اثبات آن را ندیده اســـت، اثباتی ارائه دهد و یا تغییر کوچکی در داده‌های یک مسئلهٔ اثباتیِ حل شده، به‌وجود آورید و از او بخواهید اثبات جدیدی بر اســـاس این تغییرات تنظیم کند. حتی درک او از مسئله‌های اثباتی حل شده نیز، چندان گسترده نیست و محدود به اثبات‌هایی با گام‌های محدود است و چه بسا نتواند یک اثبات انجام شدهٔ پیچیده را دنبال کند. این فرد افزون بر آنکه توانایی ارائهٔ یک استنتاج رسمی را ندارد، بسیار محتمل است که هنوز قادر به تفکیک استدلال‌های استقرایی (تجربی) و استنتاجی نباشـــد و در ارائهٔ یک اثبات، هر دوی این‌هـــا را با هم درآمیزد؛ به‌طور مثال با تکیه بر این دریافت استقرایی که قطرهای یک مستطیل، یکدیگر را نصف می‌کنند، از آن برای اثبات هم‌اندازه بودن دو قطر استفاده کند. با این حال، این سطح از استدلال، سرآغاز درک استنتاج قضیه‌ها و منطق میان رابطه‌هاست.

سطح ۴: (استنتاج رسمی). اگر دانش‌آموز به این سطح از استدلال دست یابد، از او انتظار می‌رود که افزون بر توانایی ارائهٔ استدلال استنتاجی، از چنین استدلالی برای اثبات قضیه‌ها استفاده کند و بتواند گام‌های چنین اثباتی را به‌صورتی دقیق و با نظم منطقی بنویســـد. او می‌تواند نه تنها اثبات‌های داده شـــده را به خوبی درک کند، یا اثباتی مشـــابه یک مسئلهٔ دیده شده ارائه دهد، بلکه قادر است برای یک مسئلهٔ تازه که پیش از این اثباتی برای آن ندیده است، اثباتی تنظیم کند. در این سطح، فرد شرط‌های لازم و کافی را درک می‌کند و بنابراین می‌تواند تعریف‌هایی جامع ارائه دهد که در آن‌ها از بیان شرایط غیرضروری دوری شده باشد.

در این سطح، اهمیت اصول، استنتاج‌ها و رابطه‌های منطقی میان قضیه‌ها به خوبی درک می‌شوند و فرد به خوبی هندسهٔ اقلیدسی را درک می‌کند. با این حال، هنوز توانایی استدلال او به بالاترین حد تکامل نرسیده است، چرا که از نظر فردی، تفکر او محدود به ســـطح چهارم اســـت. اصولی که پایهٔ یک سیســـتم ریاضی را تشکیل می‌دهند. حقایقی «تغییرناپذیر» انگاشته می‌شوند و به این دلیل، برای وی که در این ســـطح قرار دارد، متفاوت بودن سیستم‌های اصل موضوعی، قابل درک نیست.

با اســـتناد به مباحث کتاب‌های درسی در دهه‌های اخیر، این ســـطح بالاترین ســـطحی است که دستیابی بـــه آن تا پایان دورهٔ دبیرســـتان انتظار می‌رود. پذیرش اینکه با تغییر اصول هندسی پذیرفته شده، ممکن است مثلث‌هایی با مجموع زاویه‌های داخلی بیشتر (و یا کمتر) از ۱۸۰ درجه تعریف کرد، برای کسی که در این سطح می‌اندیشد و استدلال می‌کند، درک شدنی نیست.

سطح ۵: (دقت موشکافانه). در این سطح از تفکر، قضیه‌ها در سیستم‌های اصل‌موضوعیِ گوناگون مطرح می‌شوند و شخص قادر است این سیستم‌های متفاوت را تجزیه، تحلیل و مقایســـه کند. اصول موضوع که در

سطح پیشین به‌عنوان اجزای تغییرناپذیر هندسی درک می‌شدند، می‌توانند به‌طور اساسی تغییر کنند. برای مثال، هندسه‌های نااُقلیدسی می‌توانند درک شوند. مطالعهٔ هندسه در سطح پنجم به شدت مجرد است. این سطحی است که در آن، فرد در سطح تفکر یک ریاضی‌دان به هندسه نگاه می‌کند. او درک می‌کند که تعاریف، قراردادی‌اند و ممکن است قابل انتساب به دریافت‌های عینی و جهان واقعی نباشند.

ویژگی‌های سطوح ون‌هیلی

پدیدآورندگان نظریهٔ ون‌هیلی، علاوه بر معیارهایی که برای تشخیص سطوح ارائه داده‌اند، ویژگی‌هایی مشترک میان سطوح تفکر برشمرده‌اند.

۱. سلسله مراتبی بودن[16] سطوح. زمانی می‌توان از شخص، عملکرد خوبی را در یک سطح انتظار داشت که وی به سطوحِ پیش از آن، دست یافته باشد. به‌عنوان نمونه نمی‌توان از کسی که سطح اول را نگذرانده است، انتظار داشت که به تفکر سطح دوم دست یابد.

۲. پیشروی[17] در سطوح. پیشرفت کردن یا نکردن در سطوح، بیش از آنکه به سن یادگیرنده بستگی داشته باشد، به آموزشی که دریافت می‌کند وابسته است. برخی از شیوه‌های آموزشی به ارتقای سطوح تفکر، کمک کرده در حالی که برخی دیگر سیر پیشرفت را کند می‌سازند. به گفتهٔ ون‌هیلی، هیچ رویکرد آموزشی‌ای نمی‌تواند سبب جهش از روی یک سطح شود. با این حال، وی اشاره می‌کند که می‌توان مهارت‌هایی بالاتر از سطحِ تفکر واقعیِ یک دانش‌آموز را به وی آموزش داد، چنانکه دانش‌آموز می‌تواند فرمول به دست آوردن مساحت یک شکل را به خاطر بسپارد یا این رابطه را که «هر مربع، یک مستطیل است» حفظ کند. در این صورت تنها مبحث مورد آموزش، به سطحی پایین‌تر از سطح واقعی خود تنزل یافته است و مبحث مورد نظر فهمیده نشده است. برای توضیح این مطلب، فرض کنید دانش‌آموزی که هنوز در سطح دوم تفکر به سر می‌برد، به اقتضای برنامهٔ درسی مجبور به یادگیری مطالبی شود که درک آن‌ها به توانایی استدلال در سطح سوم نیازمند است. این دانش‌آموز درکی از تعاریف ندارد و تداخل دسته‌های اشکال هندسی را نیز درک نمی‌کند ولی مجبور است به‌طور مثال بپذیرد که مربع، یک مستطیل یا لوزی است. او پس از بارها تکرار این مطلب در کلاس توسط معلم و دیگر دانش‌آموزان، بالاخره این موضوع را به خاطر می‌سپارد بی‌آنکه عمیقاً درک کرده باشد. از این رو، هر از چند گاهی ممکن است ببینیم که چنین دانش‌آموزانی این مطلب را به‌صورت «هر لوزی یک مربع است» نیز بیان می‌نمایند.

اگر معلم بتواند مسیر فکری دانش‌آموز را در ارائهٔ استدلالی نادرست دنبال کند، می‌تواند در رفع بدفهمی دانش‌آموز و یا کاستی شیوهٔ آموزشی، بهتر و مؤثرتر عمل نماید

۳. ماهیت ذاتی و بیرونی[18]. کودکی را در نظر بگیرید که سطح تفکر هندسی او در سطح اول ون‌هیلی است. این کودک در تشخیص مربع بودنِ یک شکل، ممکن است از شباهت آن به اشیای پیرامون خود کمک بگیرد، با این حال برابری چهار ضلع و راست بودن گوشه‌ها در درک مربع بودنِ شکل نقش دارند. البته کودک به‌صورت آگاهانه به این ویژگی‌ها توجه نمی‌کند چون آن‌ها در کلیت مربع حل شده‌اند (ذاتی بودن ویژگی‌ها). در سطح دوم، همین ویژگی‌ها به‌عنوان معیاری برای تشخیص مربع بودن یک شکل به‌کار می‌روند. یعنی فرد، پیش از مربع دانستنِ یک شکل، به هم‌اندازه بودن ضلع‌ها و راست بودن زاویه‌ها به‌صورت مستقل از کلیت شکل، توجه می‌کند و تنها در صورتی که این روابط برقرار باشند، مربع بودن شکل تأیید می‌گردد (بیرونی شدن ویژگی‌ها). این یعنی با آنکه هر شکل با اجزا و ویژگی‌های خود معین می‌شود ولی در سطح اول، تنها کلیت شکل‌ها درک می‌شود و به اجزای آن‌ها توجه نمی‌شود. این در حالی است که همین اجزا، در سطح دوم، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند. پژوهشگران این موضوع را به این شکل بیان می‌کنند که اشیای ذاتی یک سطح، اشیای مورد مطالعه در سطح بعدی را تشکیل می‌دهند.

۴. زبان‌شناسی[19]. هر سطح، نمادها، زبان و روابطِ مخصوص به خود را داراست و بنابراین روابطی که در یک سطح، درست هستند، ممکن است در سطح بعدی، اصلاح گردند. به‌طور مثال، در سطح سوم، یک شکل را می‌توان با نام‌هایی متفاوت نامید. در سطح سوم این موضوع که هر مربع، یک مستطیل و یا یک متوازی‌الاضلاع است، پذیرفتنی است در حالی که چنین روابطی برای کسی که در سطح دوم تفکر هندسی قرار دارد، درک ناشدنی است.

۵. ناهماهنگی[20]. اگر دانش‌آموزی که در یک سطح معینِ ون‌هیلی قرار دارد، آموزشی در سطحی بالاتر یا پایین‌تر از سطح تفکر خویش دریافت کند، یادگیری و پیشرفت مورد انتظار، رخ نمی‌دهد. به‌ویژه اگر سطح تدریس معلم، مبحث آموزشی، واژگان یا عوامل دیگر مؤثر در یادگیری، در سطحی بالاتر از سطح تفکر دانش‌آموز باشند، یادگیری مفهومی رخ نمی‌دهد. به‌طور مثال، دانش‌آموزی که هنوز در سطح اول یا دوم تفکر، استدلال می‌کند، درکی از شرایط لازم و کافی ندارد. بنابراین از دیدگاه نظریهٔ ون‌هیلی کاملاً بدیهی است اگر چنین دانش‌آموزی، تعریف مربع یا مستطیل را به آن صورتی که در کتاب آورده شده، درک نکند و در یادگیری دسته‌بندی‌های تداخلی شکل‌ها با مشکل روبه‌رو گردد.

نتیجه‌گیری

به صورت کلی، توانایی اســـتدلال (شهودی، استقرایی و استنتاجی) بخشی اساسی از ریاضیات مدرسه‌ای را تشکیل می‌دهد. به‌طور ویژه، در مباحث ریاضی و هندسهٔ دبیرستانی، دســـتیابی به توانایی ارائهٔ اســـتدلال اســـتنتاجیِ دقیق (یا اثبات)، یکی از هدف‌های کتاب‌های درسی این مقطع است. تجربه‌های معلمان و نیز تجربهٔ شخصی نگارندگان، گواه این واقعیت است که مشکلات یادگیری در ریاضیات و هندسه، در مسائلی که حل آن‌ها مستلزم برخورداری از توانایی استدلال است نسبت به مســـائلی که با دانستن چند روش یا فرمول مشخص حل می‌شوند، خیلی بیشتر نمود می‌یابد. در بسیاری از موارد مشابه، آزمودن روش‌های رایج، همچون تکرار و تمرین چندان اثربخش نبوده و به نظر می‌رسد این بدفهمی‌ها باید به گونه‌ای عمیق‌تر شناسایی، بررسی و ریشه‌یابی گردند. از این رو نظریهٔ ون‌هیلی که خاستگاه نخستینِ آن، کلاس‌هایی با چنین مشکلاتی بوده‌اند، شایستهٔ توجه و معرفی است. این نظریه ممکن است پاسخگوی همهٔ مشکلات یادگیری هندسه و ریاضی نباشـــد، همچنان که از هیچ نظریهٔ دیگری چنین انتظاری نمی‌رود، ولی رویکرد آن در برابر مشکلات یادگیری مفهومی هندسه، قابل تأمل است. آگاهی معلمان ریاضی از این نظریه، شاید بتواند به آن‌ها در درک شیوهٔ تفکر دانش‌آموزان کمک کنـــد. بدیهی اســـت اگر معلم بتواند مســـیر فکری دانش‌آموز را در ارائهٔ استدلالی نادرست دنبال کند، می‌تواند در رفع بدفهمی دانش‌آموز و یا کاستی شیوهٔ آموزشی، بهتر و مؤثرتر عمل نماید. ایدهٔ تفاوت سطوح تفکر و توانایی استدلال کردن در افراد مختلف، ضمن آنکه منطقی و پذیرفتنی به نظر می‌رسد، می‌تواند ناکارآمدی شیوه‌های تکرار و تمرین را در بهبود برخی چالش‌های یادگیری توجیه نماید. در این نوشتار کوشش شد، نظریهٔ ون‌هیلی که پیش‌تر نیز در برخی مقاله‌ها و پایان‌نامه‌های آموزش ریاضی معرفی و بررسی گردیده بود، به زبانی ملموس‌تر که برای معلمان ریاضی، به‌عنوان مخاطبان اصلی، قابل درک و اســـتفاده باشد، معرفی گردد. نگارندگان امیدوارند که چنان مقصودی حاصل شده باشد.

پی‌نوشت‌ها

1. Mary Crowley
2. The van Hiele Model of The Development of Geometric Thought

۳. به‌طور مثال پیوزی (۲۰۰۳)؛ فایز، گِدس و تیشلر (۱۹۸۸).

4. TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study)
5. TIMSS 2011 International Results in Mathematics
6. Pierre Marie Van Hiele
7. Dina Van Hiele-Geldof
8. Structure and Insight
9. Adele
10. Visualization or Recognition
11. https://en.wikipedia.org/wiki/Van_Hiele_model
12. https://en.wikipedia.org/wiki/Van_Hiele_model#/media/File:Van_Hiele_triangle_examples.png
13. prototype
14. analysis

۱۵. ون‌هیلی تأکید می‌کند که سطوح ون‌هیلی با سن بیولوژیکی فرد ارتباط چندانی ندارند، با این‌حال با توجه به ساختار کتاب‌های درســـی، آنچه در وضعیت عادی انتظار می‌رود، آن است که افراد در ســـال‌های پس از ابتدایـــی و در آغـــاز دورهٔ نوجوانی به درک استدلال‌های استنتاجی دست یابند.

16. Sequential
17. Advancement
18. Intrinsic and extrinsic
19. Linguistics
20. Mismatch

منابع

1. Adele, G. H. (1998). The van Hiele model of geometric thinking implications for teaching k-8. Retrieved November 15, 2015 from www.webpages.uidaho.edu.
2. Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. *A research companion to principles and standards for school mathematic*s, 151- 178.
3. Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and teaching geometry*, K-12, 1- 16.
4. Fuys, D. (1984). English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.
5. Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph, i-196.
6. Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. Focus on Learning in Mathematics ,20, 27- 46.
7. Mason, M. (2009). The van Hiele levels of geometric understanding. *Colección Digital Eudoxus*, 1(2).
8. Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). TIMSS 2011 *international results in mathematics*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands.
9. Pusey, E. L. (2003). The van Hiele model reasoning in geometry: a literature review.
10. Van Hiele, P. M. (1959). The child's thought and geometry. *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, 243 -252.